الخميس 31/5/2018

تمارين حول الفصل الثاني:

المعادلات التفاضلية ذوات المعاملات الثابتة

- السؤال الأول:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^{x} + \cos x + x^2$$

والمطلوب:

1- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة

2- اقترح حلاً خاصاً وفق طريقة المعاملات غير المعينة (دون تعيين المعاملات)

3- أوجد حلاً خاصاً وفق طريقة المؤثر التفاضلي العكسي

ماهو الحل العام

الحل: المعادلة المتجانسة المناظرة:

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

المعادلة المميزة لها: $m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4 = 0$

نفرض أن: $m = \lambda - \frac{(-4)}{4} = \lambda + 1$

$m = \lambda + 1$

$m^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$m^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

$m^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

تمرين: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = \sh x$$

والمطلوب:

1. أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا علمت أن: $x\,e^{-x}$ حلاً خاصاً للمعادلة.
2. اقترح حلاً خاصاً وفق طريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين هذه المعاملات.
3. أوجد الحل الخاص وفق طريقة المؤثر للتفاضلي العكسي.

الحل: المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' + y' - y = 0$$

المعادلة المميزة لها هي:

$$m^5 - m^4 - 2m^3 + 2m^2 + m - 1 = 0$$

بما أن: $x\,e^{-x}$ حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة:

هذا الحل للمعادلة يشير لجذر مكرر مرتين للمعادلة المميزة هو $m = -1$

نقسم المعادلة المميزة على $(m+1)^2$

$$m^5 - m^4 - 2m^3 + 2m^2 + m - 1 = (m+1)^2(m^3 - 3m^2 + 3m - 1)$$
$$= (m+1)^2(m-1)^3$$

$$m_1 = m_2 = -1 \qquad m_3 = m_4 = m_5 = 1$$

الحل العام يكون:

$$y_h = e^{-x}(A_1 + A_2 x) + e^{x}(A_3 + A_4 x + A_5 x^2)$$

الحل الخاص المقترح وفق طريقة المعاملات غير المعينة

وفق القاعدة الأساسية:

- جذور هذه المعادلة هي :

$m_1 = 1+i$

$m_2 = 1+i$

$m_3 = 1-i$

$m_4 = 1-i$

جذور هذه المعادلة عقدية مثل $m_1 = m_2$ و $m_3 = m_4$
بالتالي فإن الحل العام y_h :

$$y_h = e^x \left[(A_1 + A_2 x) \cos x + (A_3 + A_4) \sin x \right]$$

ملاحظة :
بإمكاننا أن نوجد الجذور مباشرة من المعادلة :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

والتي تكتب على الشكل : $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ ونوجد جذورها

- اقتراح الحل :

$$y_{p\,مقترح} = B_1 e^x + B_2 \cos x + B_3 \sin x + B_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

- نلاحظ أنه لا يوجد اشتراك بين y_h و y_p .
لذلك فإن الحل الخاص المقترح هو الثابت .

- إيجاد الحل الخاص بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي :
المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على الشكل :

$$\underbrace{(D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4)}_{\phi(D)} y = e^x + \cos x + x^2$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$

فيكون الحل الخاص:

$$y_p = \frac{1}{\varphi(D)} e^x + \frac{1}{\varphi(D)} \cos x + \frac{1}{\varphi(D)} x^2$$

لنوجد تأثير المؤثر التفاضلي العكسي على كل من الدوال السابقة كل على حدة

فيكون y_p هو مجموع نواتج تأثير المؤثر التفاضلي العكسي عليها

$$\frac{1}{D^4-4D^3+8D^2-8D+4} e^x = \frac{1}{1-4+8-8+4} e^x = e^x$$

$$\frac{1}{(D^2)^2-4DD^2+8D^2-8D+4} \cos x =$$ نعوض كل $(-1) \leftarrow D^2$

$$= \frac{1}{(-1)^2-4D(-1)+8(-1)-8D+4} \cos x = \frac{1}{-4D-3} \cos x$$

$$= \frac{1}{-4} \frac{1}{D+\frac{3}{4}} \cos x = \frac{-1}{4} \frac{1}{1+\frac{9}{16}} \left(\sin x + \frac{3}{4} \cos x \right)$$

$$\frac{1}{D^4-4D^3+8D^2-8D+4} x^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1-(2D-2D^2+D^3-\frac{1}{4}D^4)} x^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + (2D-2D^2+D^3-\frac{1}{4}D^4) + 4D^2 \right] x^2$$

$$= \frac{1}{4} x^2 + x - 1 + 2 = \frac{1}{4} x^2 + x + 1$$

بالتالي فإن الحل الخاص أصبح على الشكل:

$$y_p = e^x - \frac{4}{25} \sin x - \frac{3}{25} \cos x + \frac{1}{4} (x^2 + 4x + 4)$$

الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y = y_h + y_p$$

** ** **

تمرين: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x + \sin 2x$$

والمطلوب:

1- ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة

2- اقترح حلاً خاصاً وفق طريقة المعاملات غير المعينة (دون تعيين تلك المعاملات).

3- أوجد الحل الخاص وفق المؤثر التفاضلي العكسي ما هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

الحل: المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة:

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m^2(m^2 - 2m + 1) + (m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$(m^2 - 2m + 1)(m^2 + 1) = 0$$

إما: $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = i \quad \wedge \quad m_2 = -i$

أو: $m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0$

$m_3 = m_4 = 1$

إذن الجذور هي:

$m_1 = i \qquad m_2 = -i \qquad m_3 = m_4 = 1$

الجذور العقدية مختلفة، أما الجذر الحقيقي فمكرر بالتالي فإن الحل العام هو:

$$y_h = e^x(A_1 + A_2 x) + A_3 \cos x + A_4 \sin x$$

- الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو على الشكل:

y_p مقترح $= \beta_1 x e^{x} + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \cos 2x$

* نلاحظ بأنه يوجد اشتراك بين y_h و y_p ، ولإزالة هذا الاشتراك
* نضرب الجزء المشترك فقط بأقل مرة لـ x تزيل هذا الاشتراك

y_p مقترح معدل $= \beta_1 x^2 e^{x} + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \cos 2x$

- لإيجاد الحل الخاص نتبع طريقة المؤثر التفاضلي العكسي:

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} e^{x} + \frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \sin 2x$$

$$\frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} e^{x} = \frac{1}{(12D^2 - 12D + 4)\big|_{D=1}} x^2 e^{x} = \frac{x^2}{4} e^{x}$$

$$\frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \sin 2x = \frac{1}{(-4)^2 - 2D(-4) + 2(-4) - 2D + 1} \sin 2x = \frac{1}{6D + 9} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{D + \frac{3}{2}} \sin 2x = \frac{1}{6} \frac{1}{4 + \frac{81}{36}} \left[-2\cos 2x + \frac{9}{6} \sin 2x \right]$$

$$= \frac{4}{150} \left(-2\cos 2x + \frac{9}{6} \sin 2x \right)$$

$$y_p = \frac{x^2}{4} e^{x} - \frac{4}{75} \cos 2x + \frac{1}{25} \sin 2x$$

$$y = y_h + y_p$$

** ** **

⑦

m^4	$\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1$
$-4m^3$	$-4\lambda^3-12\lambda^2-12\lambda-4$
$+8m^2$	$8\lambda^2+16\lambda+8$
$-8m$	$-8\lambda-8$
4	$+4 \quad =0$

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$$

المعادلة من الشكل: $\lambda^4+p\lambda^2+q\lambda+r=0$

تشكل المعادلة: $Z^3+2pZ^2+(p^2-4r)Z-q^2=0$

$$Z^3+4Z^2+(4-4)Z=0=0$$

$$Z^3+4Z^2=0$$

$$Z^2(Z+4)=0$$

جذور هذه المعادلة $Z_2=Z_3=0$ $\quad Z_1=-4$

$2\lambda_1=\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}+\sqrt{Z_3} \Rightarrow 2\lambda_1=2i+0+0 \Rightarrow \lambda_1=i$

نفرض أن $m=\lambda+1$ فيكون $m_1=1+i$

$2\lambda_2=\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_2}-\sqrt{Z_3} \rightarrow 2\lambda_2=2i \rightarrow \lambda_2=i$

ومنه نجد أن: $m_2=1+i$

$2\lambda_3=-\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}-\sqrt{Z_3}=-2i \Rightarrow 2\lambda_3=-2i$

فإن $\lambda_3=-i$ فيكون $m_3=1-i$

$2\lambda_4=-\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_2}+\sqrt{Z_3} \Rightarrow 2\lambda_4=-2i \Rightarrow \lambda_4=-i$

أي أن $m_4=1-i$

ملاحظة: كان بالإمكان ايجاد الجذرين الأخيرين اعتماداً على أنه إذا كان m جذر عقدي هو حل للمعادلة ← مرافقه جذر أيضاً.

$$Sh\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

مقترح $y_p = B_1 e^{x} + B_2 e^{-x}$

يوجد اشتراك بين y_p و y_h :

نزيل هذا الاشتراك بالضرب بأقل قوة لـ x تزيل هذا الاشتراك

مقترح معدل $y_p = B_1 x^2 e^{x} + B_2 x^2 e^{-x}$

ثالثاً. الحل بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(D-1)^2(D+1)^2} e^{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(D-1)^2(D+1)^2} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(D-1)^2} e^{x} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(D+1)^2} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{8} x^2 \frac{e^{x}}{2} + \frac{1}{16} \frac{x^2 e^{-x}}{2} = \frac{x^2 e^{x}}{16} + \frac{x^2 e^{-x}}{32}$$

$$y = y_h + y_p$$

** ** ** **

Shad